



OLYMPIC TIN HỌC SINH VIÊN LẦN THỨ 32

Khối thi: Cá nhân Chuyên

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 06/12/2023

Nơi thi: Đại học Khoa học Huế

TỔNG QUAN ĐỀ THI

STT	Tên bài	File nguồn nộp	Thời gian chạy	Giới hạn bộ nhớ	Điểm
1	Ước số	gcd.*	1 giây	1 GiB	100
2	Phát kẹo	candy.*	2 giây	1 GiB	100
3	Đường chạy	runroad.*	2 giây	1 GiB	100
4	Chỉ số hấp dẫn	attindex.*	1 giây	1 GiB	100

Chú ý: Dấu * được thay thế bởi đuôi ngầm định của ngôn ngữ được sử dụng.

Hãy lập trình giải các bài toán dưới đây:

Bài 1. Ước số (100 điểm)

Số $fib(n)$ với $n \geq 0$ được tính theo công thức sau:

$$fib(n) = \begin{cases} n & \text{nếu } n \leq 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

Yêu cầu: Cho ba số nguyên dương a, b, M , gọi u là ước số chung lớn nhất của $fib(a)$ và $fib(b)$, hãy tính phần dư của phép chia u cho M .

Dữ liệu: Vào từ thiết bị vào chuẩn gồm ba số nguyên dương a, b, M ($a, b, M \leq 10^{12}$).

Kết quả: Ghi ra thiết bị ra chuẩn một số là phần dư của phép chia u cho M .

Ví dụ:

Dữ liệu vào	Kết quả ra
6 9 10	2

Giới hạn:

Subtask 1 (70% số điểm): $a, b, M \leq 50$;

Subtask 2 (20% số điểm): $a, b, M \leq 10^9$;

Subtask 3 (10% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

Bài 2. Phát kẹo (100 điểm)

Trong một trò chơi của chương trình ngoại khóa có n bạn nhỏ tham gia, các bạn xếp thành một hàng ngang và được đánh số từ 1 đến n theo chiều từ trái sang phải để nhận kẹo. Bạn thứ i ($1 \leq i \leq n$) dự định sẽ được nhận a_i cái kẹo. Alice được mời lên phát kẹo cho các bạn đứng từ vị trí L đến vị trí R ($1 \leq L \leq R \leq n$). Là một người yêu trẻ nhỏ và cũng say mê toán học, trước khi lên phát kẹo Alice đã chọn một chữ số k và chuẩn bị thêm một số kẹo để phát

theo cách: Bạn có chỉ số i ($L \leq i \leq R$) sẽ được nhận $2a_i$ cái kẹo nếu i chia hết cho k hoặc trong số i có chứa chữ số k , ngược lại bạn i sẽ nhận a_i cái kẹo.

Theo ý tưởng trên, Alice đã đề xuất một bài toán thú vị dưới đây:

Cho dãy số nguyên không âm a_1, a_2, \dots, a_n và q thao tác, mỗi thao tác thuộc một trong hai loại sau:

- 1) Thao tác loại 1 được mô tả bằng ba số có dạng: $1 \ i \ c$, có nghĩa là thay đổi giá trị phần tử i bằng c ;
- 2) Thao tác loại 2 được mô tả bằng bốn số có dạng: $2 \ L \ R \ k$, có nghĩa là cần tính $\sum_{i=L}^R b_i$, trong đó $b_i = 2a_i$ nếu i chia hết cho k hoặc i có chứa chữ số k , ngược lại $b_i = a_i$.

Yêu cầu: Cho dãy a_1, a_2, \dots, a_n và q thao tác, hãy thực hiện lần lượt từng thao tác, với mỗi thao tác loại 2 đưa ra giá trị cần tính.

Dữ liệu: Vào từ thiết bị vào chuẩn có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa hai số nguyên dương n, q ($n, q \leq 2 \times 10^5$);
- Dòng thứ hai chứa n số nguyên không âm a_1, a_2, \dots, a_n ($a_i \leq 10^9$);
- Tiếp theo là q dòng, mỗi dòng mô tả một thao tác. Cụ thể nếu là thao tác loại 1 thì dòng gồm ba số nguyên $1, i, c$ ($1 \leq i \leq n; 0 \leq c \leq 10^9$), còn nếu là thao tác loại 2 thì dòng gồm bốn số nguyên $2, L, R, k$ ($1 \leq L \leq R \leq n; 1 \leq k \leq 9$).

Kết quả: Ghi ra thiết bị ra chuẩn q dòng, mỗi dòng tương ứng với câu trả lời cho thao tác loại 2 trong dữ liệu vào.

Ví dụ:

Dữ liệu vào	Kết quả ra
16 4	21
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	75
2 1 5 2	95
2 14 16 4	
1 14 24	
2 14 16 4	

Giới hạn:

Subtask 1 (40% số điểm): $n, q \leq 200$;

Subtask 2 (20% số điểm): Không có thao tác loại 1;

Subtask 3 (20% số điểm): Tất cả các thao tác loại 2 có k bằng 1;

Subtask 4 (20% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

Bài 3. Đường chạy (100 điểm)

Ailce sống ở một ngôi làng cổ, ngôi làng nổi tiếng với nhiều cảnh đẹp. Làng có n địa điểm được đánh số từ 1 đến n và có $n - 1$ đoạn đường nối giữa các cặp địa điểm bảo đảm đi lại giữa hai địa điểm bất kì. Địa điểm i ($1 \leq i \leq n$) có độ cao h_i so với mặt nước biển. Với tinh thần yêu thể thao, người dân trong làng thường tổ chức các vòng chạy, một vòng chạy được đặc trưng bởi một bộ ba số x, y, z ($1 \leq x < y < z \leq n$), khi đó mọi người sẽ chạy theo đường đi ngắn nhất từ địa điểm x đến địa điểm y , từ y đến z và cuối cùng là từ z về x . Độ dài đường đi ngắn nhất giữa hai địa điểm được tính bằng số đoạn đường ít nhất để đi từ địa

điểm này đến địa điểm kia. Độ dài một vòng chạy là tổng độ dài đường đi ngắn nhất từ x đến y , từ y đến z và từ z về x . Độ cao của một vòng chạy là độ cao của địa điểm có độ cao cao nhất trong các địa điểm thuộc vòng chạy (tính cả độ cao của các địa điểm x, y, z). Là một người yêu Tin học, với một giá trị t , Alice muốn tính tổng giá trị độ dài của tất cả các vòng chạy có độ cao vòng chạy là t .

Yêu cầu: Gọi s là tổng giá trị độ dài của tất cả các vòng chạy có độ cao vòng chạy là t , hãy tính phần dư của s chia $(10^9 + 7)$.

Dữ liệu: Vào từ thiết bị vào chuẩn có khuôn dạng:

- Dòng đầu chứa hai số nguyên dương n, t ($n \leq 2 \times 10^5; t \leq 10^9$);
- Dòng thứ hai gồm n số nguyên dương h_1, h_2, \dots, h_n ($h_i \leq 10^9$);
- Tiếp theo là $n - 1$ dòng, mỗi dòng chứa hai số nguyên dương u, v ($1 \leq u, v \leq n; u \neq v$) mô tả một đoạn đường nối giữa hai địa điểm u và v .

Kết quả: Ghi ra thiết bị ra chuẩn một số nguyên là phần dư của s chia $(10^9 + 7)$.

Ví dụ:

Dữ liệu vào	Kết quả ra
5 2	50
1 1 1 2 2	
1 2	
1 3	
2 4	
2 5	

Giới hạn:

Subtask 1 (40% số điểm): $n \leq 200$;

Subtask 2 (40% số điểm): $t = 2$ và $1 \leq h_i \leq 2$;

Subtask 3 (20% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

Bài 4. Chỉ số hấp dẫn (100 điểm)

Chỉ số hấp dẫn của xâu kí tự số S ứng với số nguyên tố p là số cặp vị trí khác nhau i, j ($1 \leq i < j \leq |S|$) thỏa mãn điều kiện: Số được tạo từ các kí tự thứ i đến kí tự thứ j của S chia hết cho p . Chú ý rằng, số tạo được có thể chứa các chữ số 0 không có nghĩa ở đầu.

Ví dụ, với xâu $S = '070070'$ và $p = 13$ ta có các cặp vị trí: $(1, 1), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (4, 4)$ và $(6, 6)$. Như vậy, chỉ số hấp dẫn của S ứng với $p = 13$ là 9.

Yêu cầu: Cho xâu S và số nguyên tố p , với mỗi truy vấn trong q truy vấn có dạng là cặp số L, R , hãy cho biết chỉ số hấp dẫn của xâu được ghép lần lượt các kí tự thứ L đến kí tự thứ R của S .

Dữ liệu: Vào từ thiết bị vào chuẩn:

- Dòng đầu tiên chứa số nguyên tố p ($2 \leq p \leq 10^9 + 7$);
- Dòng thứ hai chứa xâu S ($|S| \leq 10^5$) chỉ gồm các kí tự '0' đến '9';
- Dòng thứ ba chứa số nguyên q là số lượng truy vấn ($1 \leq q \leq 10^5$);
- Mỗi dòng trong q dòng sau chứa hai số nguyên L và R ($1 \leq L \leq R \leq |S|$).

Kết quả: Đưa ra thiết bị ra chuẩn q dòng, mỗi dòng một số nguyên là chỉ số hấp dẫn của xâu tương ứng truy vấn trong dữ liệu vào.

Ví dụ:

Dữ liệu vào	Kết quả ra
13	9
070070	4
3	0
1 6	
2 5	
2 2	

Giới hạn:

Subtask 1 (20% số điểm): $|S|, q \leq 100$;

Subtask 2 (40% số điểm): $p = 2$;

Subtask 3 (40% số điểm): Không có ràng buộc nào thêm.

----- **Hết** -----